

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES PILOTE DE LIGNE

(Sujet très librement adapté de l'original)

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2 Heures
Coefficient : 1

CALCULATRICE AUTORISÉE

ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE

EPL/S 2008

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

À LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM

- 1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, l'**étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez**, c'est-à-dire épreuve de mathématiques (voir modèle ci-dessous).
- 2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un **STYLO BILLE** ou une **POINTE FEUTRE** de couleur **NOIRE**.
- 3) Utilisez le sujet comme brouillon et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.
- 4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.
- 5) Cette épreuve comporte 36 questions, certaines, de numéros consécutifs, sont liées. La liste des questions liées est donnée au début du texte du sujet.

Chaque candidat devra choisir au 24 questions parmi les 36 proposées.

Il est inutile de répondre à plus de 24 questions : la machine à lecture optique lira les réponses en séquence en partant de la ligne 1, et s'arrêtera de lire lorsqu'elle aura détecté des réponses à 24 questions, quelle que soit la valeur de ces réponses.

Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

6) À chaque question numérotée entre 1 et 36, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 37 à 100 sont neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E. Pour chaque ligne numérotée de 01 à 36, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

- ▶ soit vous décidez de ne pas traiter cette question, *la ligne correspondante doit rester vierge.*
- ▶ soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse, *vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.*
- ▶ soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes, *vous devez noircir deux des cases A, B, C, D et deux seulement.*
- ▶ soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne, *vous devez alors noircir la case E.*

En cas de réponse fausse, aucune pénalité ne sera appliquée.

7) EXEMPLES DE RÉPONSES

- Question 1 : $1^2 + 2^2$ vaut :
 A) 3 B) 5 C) 4 D) -1
- Question 2 : le produit $(-1)(-3)$ vaut :
 A) -3 B) -1 C) 4 D) 0
- Question 3 : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est :
 A) 1 B) 0 C) -1 D) 2

Vous marquerez sur la feuille réponse :

1	<input type="checkbox"/> A	<input checked="" type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input checked="" type="checkbox"/> E
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input checked="" type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input checked="" type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Question 1 : Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ?

- A) $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(5\theta) = 16 \cos^5(\theta) + 5 \cos(\theta)$
- B) $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(5\theta) = 16 \cos^5(\theta) - 20 \cos^3(\theta) + 5 \cos(\theta)$
- C) $\cos \frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$
- D) $\cos \frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$ car $\cos \frac{\pi}{10} \leq \cos \frac{\pi}{3}$

Question 2 : Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère les points $I(1,2)$, $M(2,3)$ et $M'(\sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$.

La similitude de centre I qui transforme M en M' est alors :

- A) de rapport 2
- B) d'angle $\frac{\pi}{4}$
- C) de rapport $\frac{1}{2}$
- D) d'angle $\frac{\pi}{3}$

Question 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à résoudre l'équation d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(2k\theta) = 0.$$

- A) Si θ est solution, alors $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin^2(k\theta) = 2^{n-1}$
- B) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(2k\theta) = \cos(n\theta) \left(\frac{\cos(\theta)}{2}\right)^n$
- C) L'ensemble des solutions est $\left\{\frac{\pi}{n} + k\frac{\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- D) Il n'y a pas de solution à cette équation

Question 4 : On considère l'application f qui à tout nombre complexe $z \neq i$ associe

$$f(z) = \frac{z+i}{z-i}.$$

On note $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ et $i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) = 0\}$

- A) f est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ dans \mathbb{C}
- B) $f(\mathbb{R}) = \mathcal{U}$
- C) $f(\mathcal{U} \setminus \{i\}) = i\mathbb{R}$
- D) $f(i\mathbb{R} \setminus \{i\}) = \mathbb{R}$

Question 5 : On cherche le lieu des points d'affixe z tels que z , z^2 et z^5 soient les affixes de trois points alignés. On note H cet ensemble de points et H_c l'ensemble de leurs affixes.

- A) $z \in H_c \iff z \in \mathbb{R}$ ou $z^3 + z^2 + z$ est imaginaire pur
- B) $\Im(z^3 + z^2 + z) = 3(\Re(z))^2 - (\Im(z))^2 + 2\Re(z) + 1$
- C) H est une hyperbole équilatère centrée en $(-\frac{1}{3}, 0)$ de grand axe parallèle à l'axe des imaginaires et de demi-grand axe $\sqrt{\frac{2}{3}}$
- D) H contient une hyperbole centrée en $(-\frac{1}{3}, 0)$ de grand axe parallèle à l'axe des imaginaires, de demi-grand axe $\sqrt{\frac{2}{3}}$ et dont les asymptotes ont $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$ pour coefficients directeurs

Question 6 : On considère les suites $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ définies par :

$$(\forall n \geq 2), u_n = \prod_{k=2}^n \cos \frac{\pi}{2^k} \text{ et } v_n = u_n \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

- A) $(u_n)_{n \geq 2}$ est croissante et majorée par 1 ; elle est donc convergente

- B) $(v_n)_{n \geq 2}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$
- C) $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ sont adjacentes
- D) $(u_n)_{n \geq 2}$ est convergente de limite $\frac{1}{\pi}$

Question 7 : Soit la fonction f définie par :

$$(\forall t \geq 0), f(t) = \ln(1+t) + \frac{t^2}{1+t^2}.$$

- A) f est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R}_+ , croissante et concave
- B) La courbe représentative de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ car

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} = 1$$

- C) f réalise une bijection de \mathbb{R}_+ sur \mathbb{R}_+ et sa bijection réciproque est dérivable sur \mathbb{R}_+ car $(\forall t \geq 0), f'(t) \neq 0$
- D) f réalise une bijection de \mathbb{R}_+ sur \mathbb{R}_+ et sa bijection réciproque est dérivable sur \mathbb{R}_+ car toute bijection dérivable admet une réciproque dérivable

Question 8 : f désignant la fonction définie à la question 7, on peut montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \exists a_n \in \mathbb{R}_+, f(a_n) = \frac{1}{n}.$$

- A) $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante car f^{-1} est décroissante et $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ est décroissante
- B) $(a_n)_{n \geq 1}$ est convergente de limite 0 puisque f^{-1} est continue à droite en 0
- C) $(a_n)_{n \geq 1}$ est convergente de limite 0 puisque $(a_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et positive
- D) $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

Question 9 : On considère à présent une fonction f continue sur \mathbb{R} admettant une limite finie ℓ en $+\infty$, et a un nombre réel strictement positif.

A) $y \mapsto \int_0^y f(t) dt$ est continue sur $]b, b+a[$ et dérivable sur $]b, b+a[$ pour tout $b \in \mathbb{R}$.

B) $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_y^{y+a} f(t) dt + a\ell = 0$

C) $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X f(t+a) - f(t) dt = \int_0^a f(t) dt + a\ell$

D) $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X \arctan(t+1) - \arctan(t) dt = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}$

Question 10 : A) $(\forall x \in \mathbb{R}), (\exists \theta \in]0,1[, (\forall n \in \mathbb{N}), e^x = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$

B) $(\forall x \in \mathbb{R}), (\forall n \in \mathbb{N}), e^x \geq \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!}$

C) $(\forall x \in \mathbb{R}), (\forall n \in \mathbb{N}), e^x \geq \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!}$

D) $(\forall x \in \mathbb{R}_-), (\forall n \in \mathbb{N}), e^x \leq \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!}$

Question 11 : Soient a et b deux fonctions réelles à valeurs strictement positives de la variables réelle et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $a(x) \underset{x \rightarrow \alpha}{\sim} b(x)$.

A) Il existe une fonction ε définie sur un voisinage de α telle que

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \varepsilon(x) = 0 \text{ et } \ln(a(x)) = \ln(b(x)) + \ln(1 + \varepsilon(x))$$

B) $\ln(a(x)) \underset{x \rightarrow \alpha}{\sim} \ln(b(x))$

C) $\ln(1 + \frac{x}{2} + \sin^2(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(1+x)$ car $1 + \frac{x}{2} + \sin^2(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1+x$

D) $\ln(|\cos(x)|) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(1+|x|)$ car $|\cos(x)| \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1+|x| \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$

Question 12: A) Pour $\beta \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(\alpha x))}{\ln(\cos(\beta x))} = -\frac{\alpha^2}{\beta^2}$

B) Pour $\beta \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(\alpha x))}{\ln(\cos(\beta x))} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$

C) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left(\tan \frac{3x}{2} \right)^{\tan(3x)} = e^{-1}$

D) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left(\tan \frac{3x}{2} \right)^{\tan(3x)} = e$

Question 13: Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \longmapsto \exp\left(\frac{x-1}{x^2}\right) \\ 0 & \longmapsto 0 \end{cases}$$

A) f est continue sur \mathbb{R} , dérivable sur \mathbb{R}^* et non dérivable en 0

B) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{2-x}{x^3} \exp\left(\frac{x-1}{x^2}\right)$

C) Sur $[1, +\infty[$, f ne possède qu'un extremum, en 2, puisque $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$

D) L'équation $f(x) = x$ admet deux et seulement deux solutions sur \mathbb{R} et la droite d'équation $x = y$ est tangente à la courbe représentative de f

Question 14: Soit f la fonction de la variable réelle définie par : $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)\sqrt{x(x+2)}$

A) Aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$, $\sqrt{x(x+2)} = x\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$

B) Au voisinage de $+\infty$, la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = x + 2$ pour asymptote

C) Au voisinage de $-\infty$, la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = x + 2$ pour asymptote

D) Au voisinage de $-\infty$, la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = x + 2$ pour asymptote et la courbe est au-dessus de son asymptote

Question 15: Si f est une fonction continue sur un segment réel $[a, b]$ ($a < b$)

A) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt$

B) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt$

C) $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (n+k)} = n \exp\left(\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)\right)$

D) $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (n+k)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4n}{e}$

Question 16: On désigne par $[x]$ la partie entière du nombre réel x .

On considère la fonction réelle f définie par $f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \int_0^x 3^{-[t]} dt$.

A) f est définie sur \mathbb{R} car $t \mapsto 3^{-[t]}$ est une fonction en escaliers

B) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 3\left(\frac{1-3^{-n}}{2}\right)$

C) Pour montrer qu'une fonction g définie sur \mathbb{R} admet une limite réelle en $+\infty$, il suffit de montrer que la suite $(g(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente

D) f est croissante sur \mathbb{R} et majorée par $\frac{1}{e \ln 3}$.

f admet donc une limite réelle en $+\infty$, égale à $\frac{3}{2}$, limite de la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$

Question 17: On cherche à déterminer les fonctions g de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* vérifiant

$$(P) : \quad (\forall x > 0), \quad g'(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$$

A) Si g vérifie (P), alors g est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* et $(\forall x > 0)$, $x^2 g''(x) = g(x)$

- B) Pour tout $x > 0$, il existe un unique $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = e^t$ et la fonction définie sur \mathbb{R} par $t \mapsto h(t) = g(e^t)$ est solution de l'équation différentielle $h'' - h' + h = 0$
- C) Les fonctions $g : x > 0 \mapsto \sqrt{x} (A \cos(\sqrt{3} \ln(x)) + B \sin(\sqrt{3} \ln(x)))$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ vérifient (P) .
- D) L'ensemble des fonctions vérifiant (P) est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2

Question 18 : Pour $c > 0$, on cherche à résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$(E) : \quad c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

où la fonction inconnue f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 .

On pose, pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $(x(u, v), y(u, v))$ l'unique solution du système $\begin{cases} u = x + cy \\ v = x - cy \end{cases}$, d'inconnues x et y . On considère g la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par

$$(\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2), \quad g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v)).$$

- A) $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) + c \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v))$
- B) $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) - \frac{1}{2c} \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v))$
- C) $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) = \frac{1}{4c^2} \left(c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) (x(u, v), y(u, v))$
- D) $(x, y) \mapsto e^x \operatorname{ch}(cy) + 2$ est solution de (E) sur \mathbb{R}^2

Question 19 : On considère le domaine D dont on veut calculer l'aire \mathcal{A}_D

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x^2 + y^2 - 2y > 0\}.$$

On note $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \times [-\pi, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (\rho, \theta) & \longmapsto & (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \end{cases}$

- A) $\varphi^{-1}(D) = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [-\pi, \pi], 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}, 2 \sin(\theta) < \rho \leq 1\}$
- B) $\varphi^{-1}(D) = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [-\pi, \pi], 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}, 2 \sin(\theta) \leq \rho \leq 1\}$
- C) $\mathcal{A}_D = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{6}} \int_{\rho=2 \sin \theta}^{\rho=1} d\rho d\theta = \frac{\pi}{6} + 1 - \sqrt{3}$
- D) $\mathcal{A}_D = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{3}} \int_{\rho=2 \sin \theta}^{\rho=1} \rho d\rho d\theta = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Question 20 : Soient p un nombre entier naturel non nul et x un nombre entier relatif non nul différent de 1.

- A) $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1), x^{n-1} - 1$ et x sont premiers entre eux d'après le théorème de Bezout
- B) $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2), p$ divise $x^2 - x \iff p$ divise $x^n - x$
car si p divise un produit de nombres entiers ab , alors p divise a ou p divise b

On désigne par U l'ensemble des nombres entiers relatifs y tels que :
 $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2), 6$ divise $y^n - y$.

- C) U est strictement inclus dans $\{6k, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{1 + 6k, k \in \mathbb{Z}\}$
- D) $U = \{6k, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{1 + 6k, k \in \mathbb{Z}\}$

Question 21 : Soit E un ensemble de n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$).

X, Y et Z désigneront par la suite des parties de E .

- A) Le nombre de couples (X, Y) de parties de E telles que $X \cap Y = \emptyset$ est 3^n
- B) Le nombre de couples (X, Y) de parties de E telles que $X \cup Y = E$ est 3^n
- C) Le nombre de couples (X, Y) de parties de E telles que (X, Y) forme une partition de E est 3^n
- D) Le nombre de triplets (X, Y, Z) de parties de E telles que $X \cup Y = Z$ est 3^n

Question 22 : À propos de structures

- A) L'ensemble des polynômes de degré égal à n ($n > 1$) est un groupe pour l'addition usuelle des polynômes
- B) L'ensemble des matrices carrées de taille n ($n > 1$) muni des opérations matricielles usuelles est un corps

- C) L'ensemble des suites convergentes de limite 0 muni de la multiplication usuelle des suites est un groupe
- D) Si G est un groupe pour une loi T donnée et $a \in G$, alors l'ensemble $aG = \{aTx, x \in G\}$ muni de T est un groupe

Question 23 : On considère un polynôme P non nul tel que

$$P(X^2) - P(X+1)P(X) = 0.$$

- A) Si a est une racine de P , alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*) a^{2^n}$ est racine de P
- B) Si a est une racine de P , alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*) a^{2^n}$ est racine de P
- C) Si a est une racine de P , alors il existe $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ tel que $a^p = a$
- D) Les racines de P sont des racines de l'unité

Question 24 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec : $(\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket), a_k \in \mathbb{Z}$ et $a_n \neq 0$.

- A) Si $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ est un couple de nombres entiers premiers entre eux et tels que $\frac{p}{q}$ soit une racine de P , alors p divise a_0 et q divise a_n
- B) Si de plus $a_n = 1$ et P possède une racine rationnelle, alors cette racine est un nombre entier
- C) Les racines rationnelles éventuelles de $2X^3 - X^2 - 13X + 5$ sont dans $\{1, 5, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\}$
- D) $2X^4 + X^2 + 5X + 5$ admet une racine rationnelle

Question 25 : On appelle ici *suite de polynômes de Tchebychev* toute suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes vérifiant

$$(\forall n \in \mathbb{N}), (\forall \theta \in \mathbb{R}), T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

- A) $(\forall n \in \mathbb{N})$ et $(\forall \theta \in \mathbb{R})$, on a

$$\cos(n\theta) = \Re(e^{in\theta}) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (\cos \theta)^{n-2k} (1 - \cos^2 \theta)^k$$

donc une telle suite de polynômes de Tchebychev existe et ceux-ci peuvent être choisis à coefficients entiers

- B) Si $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\tilde{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites de polynômes de Tchebychev, alors

$$(\forall n \in \mathbb{N}), (\forall x \in [-1, 1]), T_n(x) = \tilde{T}_n(x)$$

et par conséquent $(\forall n \in \mathbb{N}), T_n = \tilde{T}_n$,

ce qui prouve l'unicité de la suite des polynômes de Tchebychev

- C) $(\forall n \in \mathbb{N}^*), T_{n+1}(X) = 2T_n(X) - X^2 T_{n-1}(X)$
 puisque $(\forall n \in \mathbb{N}^*), (\forall \theta \in \mathbb{R}), \cos((n+1)\theta) = 2\cos(n\theta) - \cos^2 \theta \cos((n-1)\theta)$
- D) $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \deg(T_n) = n$ et $\exists Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X], T_n(X) = X^n + Q_n(X)$

Question 26 : A) $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}, P_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ possède au moins une racine multiple puisque $P'_n = P_{n-1}$

- B) $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ est l'unique polynôme vérifiant $P_n(X) - P'_n(X) = \frac{X^n}{n!}$

C) $(\forall n \in \mathbb{N}^*), 1$ est racine double de $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$

- D) Si $m \in \mathbb{N}^*$ est divisible par $n \in \mathbb{N}^*$, alors $(\forall a \in \mathbb{C}), X^m - a^m$ est divisible par $X^n - a^n$ dans $\mathbb{C}[X]$

Question 27 : Considérons E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles définies sur \mathbb{R}_+^* , et $\mathbb{1} : x > 0 \mapsto 1$

- A) $(\forall n \in \mathbb{N}), (\mathbb{1}, x > 0 \mapsto \cos(x), x > 0 \mapsto \cos(2x), \dots, x > 0 \mapsto \cos(nx))$ est une famille libre de fonctions de E
- B) $(\forall n \in \mathbb{N}), (\mathbb{1}, \cos, \cos^2, \dots, \cos^n)$ est une famille libre de fonctions de E
- C) (ch, sh) est une famille liée de fonctions de E
- D) $(\mathbb{1}, \arctan, x > 0 \mapsto \arctan(\frac{1}{x}))$ est une famille libre de fonctions de E

Question 28 : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E

- A) Supposons l'existence de $x \in F$ tel que $x \notin G$.
Alors : $[F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \implies (\forall g \in G), x + g \in F]$
- B) $F \cap G$ peut ne pas être un sous-espace vectoriel de E
- C) $F \cup G$ ne peut être un sous-espace vectoriel de E que si $G \subset F$
- D) Si $G \subset F$, alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E

Question 29 : Soient H et K deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension finie. Soit (e_1, \dots, e_k) une base de K et $a \in H$.

- A) $\dim(\text{Vect}(e_1 + a, \dots, e_k + a)) < k$
- B) $\text{Vect}(e_1 + a, \dots, e_k + a)$ est supplémentaire à H
- C) $\text{Vect}(e_1 + a, \dots, e_k + a) = K$
- D) H admet aux moins deux supplémentaires dans E

Question 30 : Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E . Les conditions suivantes sont équivalentes à $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$:

- A) $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$
- B) $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f^2)$
- C) $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \emptyset$
- D) $f = f^2$ (f est un projecteur)

Question 31 : Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E . On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ tel que

$$f \circ \dots \circ f = f^n = \vec{0} \text{ et } f^{n-1} \neq \vec{0}.$$

- A) $(\forall x \in E), (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est libre
- B) $n \leq \dim(E)$

On supposera dans les deux items suivants que $n = \dim(E)$.

- C) $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(f^{n-1}(x))$ où $x \in E$ est tel que $f^{n-1}(x) \neq \vec{0}$
- D) $\text{Im}(f) = \text{Vect}(x, f(x), \dots, f^{n-2}(x))$ où $x \in E$ est tel que $f^{n-1}(x) \neq \vec{0}$

Question 32 : Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les deux matrices carrées de taille n à coefficients réels définies par :

$$(\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2), M(i,j) = 1,$$

$$(\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2), N(i,j) = 3 \text{ si } i = j \text{ et } N(i,j) = 1 \text{ si } i \neq j.$$

- A) $\dim(\text{Ker}(M)) = n^2 - 1$ et M est inversible si et seulement si $n = 1$
- B) $M^p = n^{p-1}M$ ($\forall p \in \mathbb{N}^*$)
- C) $N^p = n^{p-1}2^p M$ ($\forall p \in \mathbb{N}^*$)
- D) $N^p = \left(\frac{(3n-2)^p}{n} - (-2)^p \right) M$ ($\forall p \in \mathbb{N}^*$)

Question 33 : Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

On convient que $\binom{n}{k} = 0$ lorsque $k \in \mathbb{N}$ est tel que $k > n$.

- A) $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n$
- B) $(\forall a \in \mathbb{R}), \mathcal{B}_a = (1, (X-a), \dots, (X-a)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et d'ailleurs \mathcal{B}_0 en est la base canonique
- C) La matrice de passage de \mathcal{B}_a à \mathcal{B}_0 est la matrice $\left((-a)^{p-k} \binom{p}{k} \right)_{(k,p) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2}$
- D) La matrice de passage de \mathcal{B}_0 à \mathcal{B}_a est la matrice $\left((-a)^{p-k} \binom{p}{k} \right)_{(k,p) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2}$

Question 34 : Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$(\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2), f(AB) = f(A)f(B).$$

- A) f est un morphisme de groupes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la multiplication usuelle des matrices vers \mathbb{R} , muni de sa multiplication usuelle
- B) $f(O_n) = 0$ et $f(I_n) = 1$ où O_n et I_n désignent respectivement la matrice nulle et la matrice identité

- C) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. S'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = O_n$, alors $f(A) = 0$
 D) Si A est inversible, alors $f(A) \neq 0$

Question 35 : Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension 3 de base \mathcal{B} . On considère u un vecteur normé de E , a un nombre réel et f_a l'endomorphisme de E défini par :

$$(\forall x \in E), f_a(x) = x + a\langle x, u \rangle u.$$

- A) f_a est un automorphisme orthogonal de E si et seulement si $a = -2$
 B) f_2 est un automorphisme orthogonal
 C) f_{-2} est la symétrie orthogonale par rapport au plan vectoriel orthogonal à u
 D) f_{-1} est la projection orthogonale parallèlement à la droite vectorielle engendrée par u

Question 36 : L'espace affine euclidien \mathcal{A}_3 est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la droite (\mathcal{D})

de représentation paramétrique : $(\mathcal{D}) \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

- A) Les coordonnées du point symétrique de $M(a, b, c)$ par rapport à (\mathcal{D}) sont $(1 + \frac{a - 2b + c}{6}, 1 - \frac{a - 2b + c}{3}, 1 + \frac{a - 2b + c}{6})$
 B) Les coordonnées du point symétrique de $M(a, b, c)$ par rapport à (\mathcal{D}) sont $(\frac{6 - 2a - 2b + c}{3}, \frac{6 - 2a + b - 2c}{3}, \frac{6 - 2a - 2b + c}{3})$
 C) La droite symétrique par rapport à (\mathcal{D}) de l'axe $(z'Oz)$ admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
 D) La droite symétrique par rapport à (\mathcal{D}) de l'axe $(z'Oz)$ admet pour système d'équations cartésiennes : $\begin{cases} 6 - 2x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$